



همراه شما
در مسیر یوس

پاسخنامه یوس ۲۰۱۷

دانشگاه استانبول



Istanbul University

INTERNATIONAL STUDENTS' EXAM

uniland.ir

☎ ۰۲۱۹۱۳۰۵۹۰۵

✈️ @uniland_yos

دانشگاه تهران - ریاضی و هندسه (استاد محترم ۲۰۱۷): (کتابی A)

$$A: -2 < x < 2$$

$$B: \{-2, -1, 0, \dots, 7\} \Rightarrow S(A \cap B) = 7$$

$$\{-2, -1, 0, \dots, 2\}$$

①
نتیجه C

$$\textcircled{A} a + 2b - 2c = 7 \Rightarrow c - a = ?$$

$$\textcircled{B} 2a - 2b - 2c = 2$$

$$\textcircled{A} + \textcircled{B} \Rightarrow 2a - 2c = 9 \Rightarrow$$

$$a - c = \frac{9}{2} \Rightarrow c - a = -\frac{9}{2}$$

نتیجه A

$$3 + \frac{1}{2 + \frac{7}{8-n}} = 9 \Rightarrow n = ?$$

$$\frac{1}{2 + \frac{7}{8-n}} = 6 \Rightarrow 2 + \frac{7}{8-n} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{8-n} = -\frac{11}{6} \Rightarrow$$

$$8-n = -\frac{42}{11} \Rightarrow$$

$$n = 23$$

نتیجه B

$$\left(\frac{2 - \frac{5}{8}}{2 + \frac{1}{3}} \right) \cdot \left(\frac{2 - \frac{1}{2}}{7 - \frac{7}{8}} \right) = \frac{\frac{11}{8}}{\frac{5}{3}} \times \frac{\frac{3}{2}}{\frac{55}{8}} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

نتیجه C

$$\frac{n}{y} = \frac{2}{3}, \frac{y}{z} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{y-n}{n-z} = ? = \frac{y - \frac{2}{3}y}{\frac{2}{3}y - \frac{2}{3}y} = \frac{\frac{1}{3}y}{\frac{1}{3}y} = 1$$

$$x = \frac{2}{3}y, z = \frac{2}{3}y$$

نتیجه E

$$a=5, b=2 \Rightarrow \frac{2^2}{2 \times 5} + \frac{1}{2 \times 5} + \frac{2^2}{2 \times 5} = ?$$

گزینه D

$$\frac{2 \times 1^2}{2 \times 5} + \frac{1^2}{2 \times 5} + \frac{2 \times 1^2}{2 \times 5} = 10 + 5 + 7 = 22 \quad \frac{a=5}{b=2} \quad 2a+2b$$

$$\frac{x}{5} + \frac{5}{x} + \frac{1}{11} = x \Rightarrow \frac{1}{5} + \frac{11}{x} + \frac{2}{11} = ? \Rightarrow \text{همانقدر که می بینیم } x \text{ - خنثی از جواب است (با توجه به گزینه ها)}$$

$$\Rightarrow ? = -\left(\frac{x}{5} + \frac{5}{x} + \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{5}{5} + \frac{17}{x} + \frac{11}{11}\right) = 2 - x$$

گزینه B

$$\sqrt{3+\sqrt{2\sqrt{v}+1}} - \sqrt{3-\sqrt{2\sqrt{v}+1}} = x \quad \text{توان 2}$$

$$3 + \sqrt{2\sqrt{v}+1} + 3 - \sqrt{2\sqrt{v}+1} - 2(\sqrt{3+\sqrt{2\sqrt{v}+1}} \times \sqrt{3-\sqrt{2\sqrt{v}+1}}) = x^2 \Rightarrow$$

$$6 - 2(\sqrt{9 - (2\sqrt{v}+1)}) = x^2 \Rightarrow 6 - 2\sqrt{8-2\sqrt{v}} = x^2 \Rightarrow 6 - 2\sqrt{v} + 2 = x^2$$

$$\sqrt{8-2\sqrt{v}} = \sqrt{v}-1$$

$$\Rightarrow x^2 = 8 - 2\sqrt{v}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{8-2\sqrt{v}} = \sqrt{v}-1$$

گزینه C

$$(g \circ f^{-1})(-1) + (f^{-1} \circ g)(1) = g(2) + (f^{-1} \circ f)(1) = 5 + 8 = 13$$

$$f(x) = \frac{1}{x}x - 3 \Rightarrow f(x) = -1, x = 2$$

مقادیر (خط از روی)

مثل

$$g(2) = 5$$

$$g(1) = f(1)$$

$$\text{مثال: } (f^{-1} \circ f)(1) = 1$$

گزینه C

$$\left. \begin{aligned} f(n) &= \log_a(2n-a) \\ x+y &= 8 \Rightarrow f(x)=2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = \log_a^{12-a} = 2 \Rightarrow a^2 = 12-a$$

D كرينه
 $a=3$

$$f(n-1) = \frac{2}{n} + f(n), \quad f(0) = 27 - f(1) \quad \text{باز هم بر رابط} \Rightarrow f(0) = \frac{2}{1} + f(1) \quad (1)$$

$$\Rightarrow f(1) = ? \quad f(1) = \frac{2}{2} + f(2)$$

$$\Rightarrow (A) + (B) \Rightarrow 2f(0) = 36 + 12 = 48$$

$$\Rightarrow f(0) = 24$$

B كرينه

$$f(21) = \frac{2}{21} + f(22)$$

$$f(0) = \left(21 \times \frac{2}{21}\right) + f(21) \quad (B)$$

$$\left. \begin{aligned} P(x) &= (x-2)(x-3)B(x) + ax+b \\ P(2) &= 8, P(3) = 11 \\ a \cdot b &= ? \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} P(2) &= 2a+b=8 \\ P(3) &= 3a+b=11 \end{aligned}$$

A كرينه
(12) $a \cdot b = -2$

$$x, y \in \mathbb{R}$$

$$(x+i)(2-ni) + (1+i)(x-yi) = 3-9i \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = ? \quad (12)$$

$$2x - 2ni - yi - x + x - yi + xi + y = 3 - 9i$$

$$x + (-x-2y)i = 3 - 9i \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ -x-2y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=3 \\ y=1 \end{matrix} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{10} = 5\sqrt{2}$$

A كرينه

$$e^{x^2-y^2} - 2xy - 2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{y=-1}^{x=1} = \frac{-F'(x)}{F'(y)} = \frac{-2xe^{x^2-y^2} - 2y}{-2ye^{x^2-y^2} - 2x} \Big|_{y=-1}^{x=1} \quad (\text{جواب ۱۲})$$

$$= -\frac{5}{-1} = 5 \quad \boxed{\text{گزینه D}}$$

$$a) \int_0^a (x^2+1) dx = \int_0^a (x^2+2) dx \Rightarrow \quad (\text{جواب ۱۵})$$

$$x^3+x \Big|_0^a = x^3+2x \Big|_0^a \Rightarrow a^3+a = a^3+2a \Rightarrow a^3-a-2=0 \Rightarrow$$

$$a = -1 \text{ غلط}$$

$$\boxed{a=2}$$

گزینه B

$$\frac{\sin 2^\circ \cos 1^\circ + \cos 2^\circ \sin 1^\circ}{\cos 7^\circ \cos 1^\circ + \sin 7^\circ \sin 1^\circ} = \frac{\sin(2^\circ+1^\circ)}{\cos(7^\circ-1^\circ)} = \frac{\sin 3^\circ}{\cos 6^\circ} = 1 \quad (\text{گزینه E}) \quad (17)$$

* ۳ و ۵ متمم هستند و سینوس و کسینوس برای زاویه‌های مکمل برابرند.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{2017} = ? \quad (18)$$

$$\Rightarrow A = 2 \begin{bmatrix} -1 & 3/2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = 2^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2^2 I \quad \text{تقسیم به بلوک}$$

$$A^2 = A^T \times A^T = 2^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{2017} = 2^{1008} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boxed{\text{گزینه A}}$$

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = \log_\delta x \Rightarrow \int d(f^{-1}(x)) = \int (f^{-1})' dx = f^{-1}(x) \stackrel{①}{=} \delta^x + C \quad (19)$$

$$\text{نکته: } d(f(x)) = f'(x) dx$$

انتگرال مشتق باهم ساده می شوند.

گزینه A

$$y = \log_\delta x \Rightarrow x = \delta^y \Rightarrow f^{-1}(x) = \delta^x \quad ①$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} - r^n}{r^{n+1} - r^n} = \frac{0}{0} \text{ HOP } \frac{r \times r^{n+1} \times \ln r}{1 \times r^{n+1} \times \ln r} = \frac{r \times r^n}{r} = 1 \text{]}$$

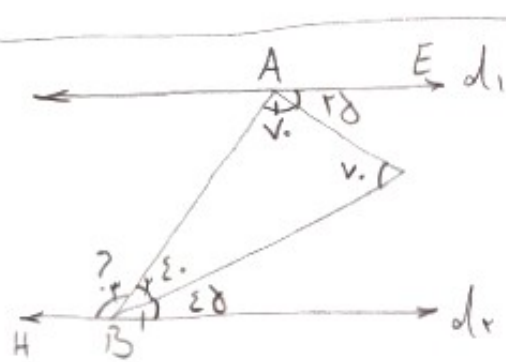
جواب ۱۹
گزینہ D

$$\frac{\cos^2 n}{1 - \tan^2 n} + \frac{1}{1 + \cot^2 n} = \frac{\cos^2 n}{\cos^2 n - \sin^2 n} + \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 n}} = \cos^2 n + \sin^2 n = 1$$

جواب ۲۰

گزینہ E

$$\star \cos^2 n = \cos^2 n - \sin^2 n$$



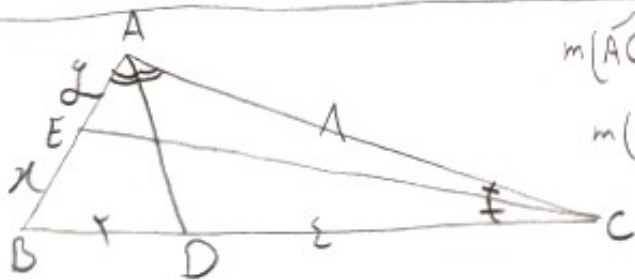
$$AB = BC \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{V}_0 \Rightarrow \hat{B}_2 = x$$

$$V_0 = 2x + \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{B}_1 = 2x$$

۲۱

گزینہ E

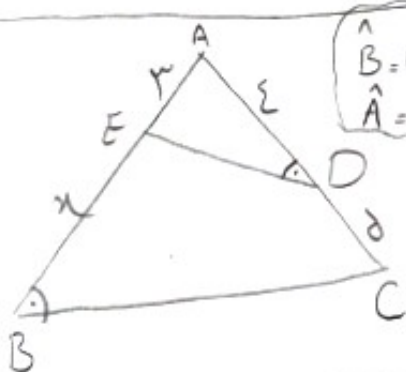
$$\hat{B}_2 = 90^\circ$$



$$\left. \begin{aligned} m(\hat{ACE}) = m(\hat{BCE}) &\Rightarrow \frac{x}{n} = \frac{1}{2} \\ m(\hat{BAD}) = m(\hat{DAC}) &\Rightarrow \frac{n+x}{1} = \frac{2}{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

۲۲

گزینہ C



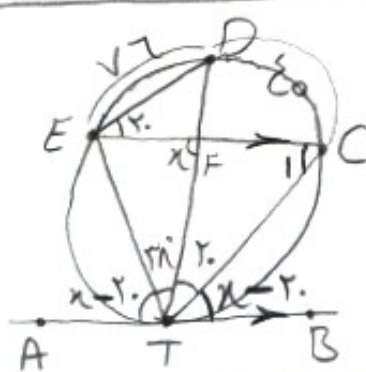
$$\hat{B} = \hat{D}$$

$$\hat{A} = \text{مترک}$$

$$\triangle AED \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{r}{9} = \frac{x}{r+n} \Rightarrow n=9$$

۲۳

گزینہ C



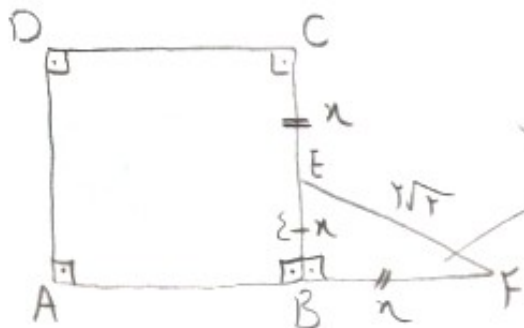
$$\hat{FTB} = n \Rightarrow \hat{CTB} = n - 2$$

۲۴

$$x = \hat{C}_1 + 2 \Rightarrow \hat{C}_1 = x - 2 \Rightarrow \hat{ETA} = x - 2$$

$$x - 2 + 2n + 2 + n - 2 = 180 \Rightarrow n = 11^\circ$$

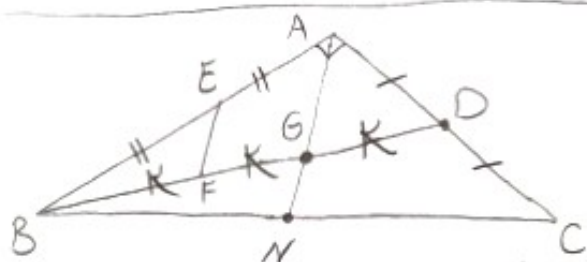
گزینہ D



حل یا حدس $n=2$ لزینه D

۲۵

فناغشت: $2 = x^2 + (2-x)^2$



۲۶

$\frac{DF}{BD} = \frac{2}{3} \Rightarrow DF = 2K, BD = 3K$

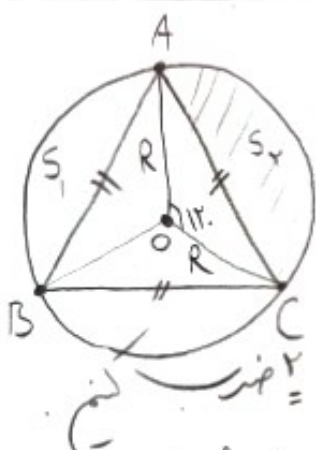
از A میانه وارد بر وتر BC داریم می‌کنیم و با وتر به آنکه BD هم میانه است لذا تلاقی AN و

BD مرکز ثقل یعنی G را می‌دهد که فاصله آن از ضلع یک سوم میانه و فاصله آن

از رأس، دوم میانه می‌باشد. $AN = \frac{2}{3} BC = 18 \Rightarrow AG = 12$

$\frac{BE}{EA} = \frac{BF}{FG} \Rightarrow \triangle BEF \sim \triangle BAG \Rightarrow EF = \frac{AG}{2} = 6$

لزینه C



۲۷

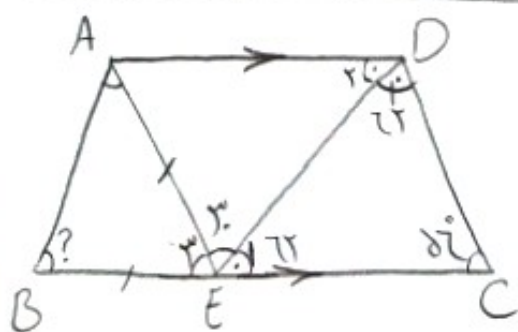
آنرا از O به سه رأس مثلث وصل کنیم. مساحت مثلث به سه تکه‌ای برابر تقسیم می‌شود. از طرفی چون $AB=AC \Leftrightarrow S_1=S_2$ بنابراین گمانی است مساحت segment (parça) مربوط به S_2 را حساب کرده و در ۲ ضرب کنیم.

$S(\triangle AOC) = \frac{1}{2} R^2 \sin 120^\circ = 3\sqrt{3} \Rightarrow R = 2\sqrt{3}$

$S_2 = \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 4\pi - 3\sqrt{3} \Rightarrow S_1 + S_2 = 2(4\pi - 3\sqrt{3})$

لزینه D

$8\pi - 6\sqrt{3}$

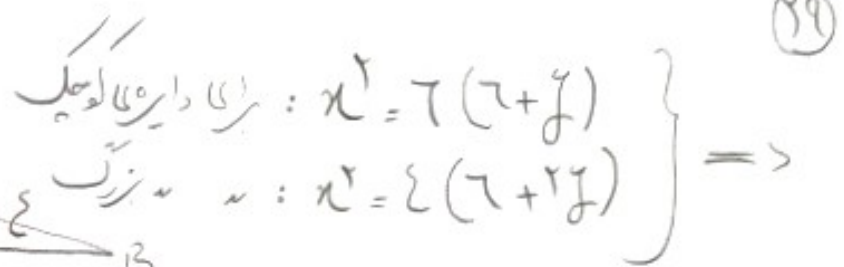


۲۸

$AD \parallel BC \Rightarrow \hat{D}_2 = \hat{E}_1 \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{E}_1 = 72^\circ$

$\hat{E}_3 = 180 - (72 + 72) = 36 \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 72^\circ$

لزینه C



لزمینه B $n = \sqrt{v^2} = 2\sqrt{2}$



$AD \parallel BC$
 $AB \parallel DC \Rightarrow AB \parallel CD \text{ (المقابلان) } \Rightarrow AB = CD \text{ (ج)}$

$$DEH \sim BEC \Rightarrow \frac{DE}{EC} = \frac{HE}{BE} \Rightarrow \frac{7K}{7K} = \frac{HE}{9} \Rightarrow \boxed{HE = 7}$$

$$\Rightarrow n = FH + HE = 18 + 7 = 25]$$

لزمینہ